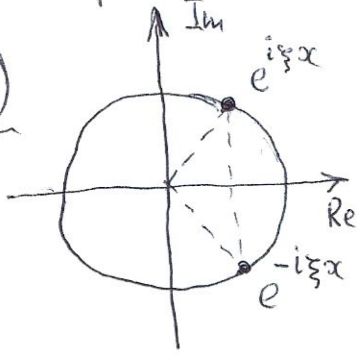
§ 8. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье (ПФ) заменяет ряды Фурье в случае бесконечных промежутков. Это важнейший инструмент математической физики.

Вместо косинусов и синусов в нем используется мнимая экспонента, сочетающая обе функции.

Ситуация. $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$; x, ξ – двойственные переменные.



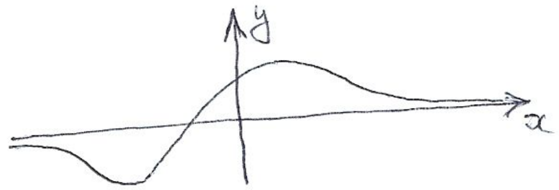
$e^{i\xi x} = \cos(\xi x) + i\sin(\xi x)$, $\quad e^{-i\xi x} = \cos(\xi x) - i\sin(\xi x)$

а) $|e^{i\xi x}| = 1$, $|e^{-i\xi x}| = 1$ для $\forall\, \xi, x \in \mathbb{R}$;

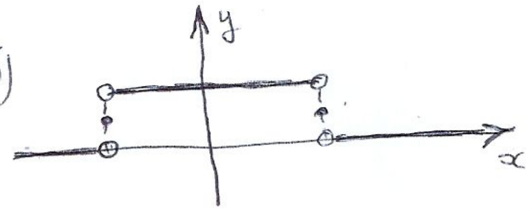
б) $\dfrac{d}{dx} e^{i\xi x} = i\xi e^{i\xi x}$, $\dfrac{d}{d\xi} e^{i\xi x} = ix e^{i\xi x}$ и т.д.

Преобразование Фурье (ПФ). Пусть $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ (или $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$), $f(x)$ – кусочно гладкая функция, причем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$.

Примеры. а)



б)



Преобразование Фурье $F(\xi)$ для $f(x)$ определяется формулой:

$$F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Таким образом, $f(x) \longleftrightarrow F(\xi)$.

Другие обозначения: $f(x) \longleftrightarrow \hat{f}(\xi)$ или $f^{\sim}(\xi)$ или $\mathcal{F}(f)(\xi)$, и тогда $f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$.

Общая ссылка: Колмогоров и Фомин [КФ], гл. VIII, § 4.

Леммы о ПФ

1) При сделанных предположениях $F(\xi)$ определено при всех $\xi \in \mathbb{R}$, причем

$$|F(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty .$$

2) $F(\xi)$ непрерывная функция от ξ.

3) $F(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ (лемма Римана-Лебега).

(Вопрос: может ли $F(\xi) = -\xi^2$ быть преобр. Фурье? Отв: нет.)

На самом деле:
$F(\xi) = -\xi^2 \longleftrightarrow \frac{d^2}{dx^2}$
$F(\xi) \equiv 1 \longleftrightarrow f(x) = \delta(x)$.

4) Формулу обратного преобраз. Фурье надо понимать в смысле главного значения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} F(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi, \quad -\infty < x < +\infty .$$

При этом в точках разрыва $f(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0+0) + f(x_0-0)\big)$.

NB Если $f(x)$ достаточно гладкая и быстро стремится к нулю на ∞, то обратное ПФ корректно определено в обычном смысле. Чем более гладкая $f(x)$ и чем лучше её поведение на бесконечности, тем лучше делаются все преобразования.

Идеальный пример. $f(x) \equiv e^{-x^2} \longleftrightarrow F(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

лишнее требование, см. КФ, с. 429

Теор. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, $|f(x)| \to 0$ при $|x| \to +\infty$, причем $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\, dx < \infty$. Тогда $f'(x) \longleftrightarrow i\xi F(\xi)$, т.е. дифференцирование „оригинала" дает умножение на $i\xi$ в мире Фурье-образов.

Док-во.

$$f'(x) \overset{F}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x}\, dx = \cancel{f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty}}^{\,0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(-i\xi e^{-i\xi x}\right) dx = i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx,$$

т.е. $f'(x) \longleftrightarrow i\xi F(\xi)$. □

Следствие. Пусть $f \in C^m(\mathbb{R})$, $|f^{(k)}(x)| \to 0$ при $|x| \to +\infty$ для $k = 0, 1, \dots, m-1$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|\, dx < \infty$ для $k = 0, 1, \dots, m$. Тогда $f^{(k)}(x) \longleftrightarrow (i\xi)^k F(\xi)$ для $k = 0, 1, \dots, m$. □

Док-во - очевидная индукция по k.

Главное св-во ПФ

$$\boxed{f^{(k)}(x) \longleftrightarrow (i\xi)^k F(\xi).}$$

Важные интегралы

(I) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (интеграл Эйлера-Пуассона);

(II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$ (интеграл типа Эйлера-Пуассона).

(Здесь $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ – параметры.)

Док-во. (I) Пусть $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Тогда

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right)=\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\{x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ J=r\text{ – якобиан}\}=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_{\infty}^{0}\right)=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi.\quad\Rightarrow\quad I=\sqrt{\pi}.$$

(II) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2}\cos\beta x\,dx=\left\{s=\sqrt{\alpha}\,x,\ x=\frac{s}{\sqrt{\alpha}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}s\right)ds.$$ Положим $P(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\cos\lambda s\,ds$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow P'(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}(-s\cdot\sin\lambda s)\,ds=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda s\,de^{-s^2}=\overset{\to 0}{\frac{1}{2}e^{-s^2}\sin\lambda s\Big|_{-\infty}^{\infty}}-$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\cos\lambda s\,ds=-\frac{\lambda}{2}P(\lambda).\Rightarrow$$

$$P'(\lambda)=-\frac{\lambda}{2}P(\lambda)\sim\frac{dP}{d\lambda}=-\frac{\lambda}{2}P\sim\int\frac{dP}{P}=-\int\frac{\lambda}{2}d\lambda\sim\ln|P|=-\frac{\lambda^2}{4}+M.$$

$$\Rightarrow P(\lambda)=C e^{-\lambda^2/4},\ \text{где}\ C=P(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}.\Rightarrow P(\lambda)=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$ □

Пример. Пусть $f(x)=e^{-x^2}$. $F(\xi)=?$

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(\cos(\xi x)-i\sin(\xi x))\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos\xi x\,dx=$$

$$=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}.\quad\Rightarrow\quad e^{-x^2}\longleftrightarrow\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$